ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ
ΑΝΔΡΕΑΣ ΤΟΛΙΑΣ

**ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ Ι**
**ΤΜΗΜΑ ΠΕΡΙΤΤΩΝ Α.Μ**
**ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΗ ΙΟΥΝΙΟΥ**
**ΙΟΥΝΙΟΣ 09 , 2017**

**1.** (α΄) Δίδονται δύο μη κενά υποσύνολα $A, B$ του $\mathbb{R}$ ώστε να ισχύουν τα εξής:
- Για κάθε $x \in A$ και $y \in B$ είναι $x < y$.
- Για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχουν $y \in B$ και $x \in A$ τέτοια ώστε $y - x < \epsilon$.

Δείξατε ότι $\sup A = \inf B$.

(β΄) Δίδονται τα σύνολα $A = \left\{ x \in \mathbb{Q} : -\sqrt{2} < x < \sqrt{2} \right\}$ και $B = \left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \ : \ n \in \mathbb{N} \right\}$. Να βρείτε με πλήρη δικαιολόγηση τα $\sup A$ , $\inf A$ , $\sup B$ και $\inf B$.

**2.** (α΄) Δίδεται η ακολουθία $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ με γενικό όρο

$$x_n = 3 + \frac{14}{\sqrt{n}}$$

Δείξατε , χρησιμοποιώντας αποκλειστικά τον ορισμό , ότι $x_n \to 3$.

(β΄) Αν $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ και $\{\beta_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ δύο ακολουθίες με όρια τα $x$ και $y$ αντίστοιχα τότε δείξατε ότι το η ακολουθία $a_n + \beta_n$ έχει όριο το $x + y$.

(γ΄) Η ακολουθία $y_n$ ορίζεται αναδρομικά ως εξής

$$y_1 = 1 \quad \text{και} \quad y_{n+1} = 2 + \sqrt{3 y_n} \quad \text{για κάθε} \quad n \in \mathbb{N}$$

Αποδείξατε , χρησιμοποιώντας επαγωγή , ότι η $y_n$ είναι αύξουσα και φραγμένη από το 12. Στη συνέχεια υπολογίσατε το όριό της.

(δ΄) Για καθεμία από τις παρακάτω ακολουθίες βρήκατε τα όρια τους. Απαιτείται πλήρη δικαιολογήση.

(α) $a_n = \dfrac{M^n}{n!}$ , $M > 0$ (β) $\beta_n = \sqrt[n]{n!}$ (γ) $\gamma_n = \cos n\pi + \sin n\pi$

(δ) $\delta_n = \dfrac{1}{\sqrt{n^2 + 3n} - \sqrt{n^2 + 2n}}$ (ε) $\epsilon_n = \sqrt[n]{4^n + 5^n + 8^n}$ (στ) $\zeta_n = \left(1 + \dfrac{1}{2n}\right)^{4n}$

[ ***Υπόδειξη***: *Δείξατε ότι $a_n \to 0$ χρησιμοποιώντας κατάλληλο κριτήριο. Δείξατε ότι $\beta_n \to +\infty$ χρησιμοποιώντας τον ορισμό και τέλος ότι η $\gamma_n$ δεν έχει όριο.* ]

**3.** (α΄) Αν η $f : A \to \mathbb{R}$ όπου $A$ διάστημα είναι συνεχής συνάρτηση στο $x_0$ δείξατε ότι για κάθε ακολουθία $x_n \to x_0$ θα ισχύει $f(x_n) \to f(x_0)$.

(β΄) Δίδεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής και $f(x) = x^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Να βρεθεί η τιμή $f\left(\frac{2}{3}\right)$. Απαιτείται πλήρης δικαιολόγηση.

**4.** Έστω $g : [a, \beta] \to \mathbb{R}$ μία συνεχής συνάρτηση και $x_1, x_2, x_3 \in [a, \beta]$. Να αποδειχθεί ότι υπάρχει $\xi \in [a, \beta]$ τέτοιο ώστε

$$g(\xi) = \frac{g(x_1)}{8} + \frac{3g(x_2)}{8} + \frac{g(x_3)}{2}$$

**5.** (α΄) Να δοθεί παράδειγμα φραγμένης συνάρτησης $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ ώστε να μην υπάρχει το όριο $\ell = \lim_{x \to 0^+} f(x)$. Να γίνει πλήρη δικαιόλογηση.

(β΄) Αν $f$ είναι μία συνάρτηση όπως στο (ι) εξετάσατε αν υπάρχουν τα όρια

$$\ell_1 = \lim_{x \to 0^+} x f(x) \quad , \quad \ell_2 = \lim_{x \to 0^+} (1 - x) f(x)$$